Lògica Fuzzy

Índex

- Incertesa i Imprecisió.
- Lògica Binària i Lògica Fuzzy.
- Funcions de pertinença.
- Operacions bàsiques entre conjunts.
- Inferència fuzzy.
- Fuzzyficació
- Regles.
- Defuzzyficació.
- Aplicacions i exemples.

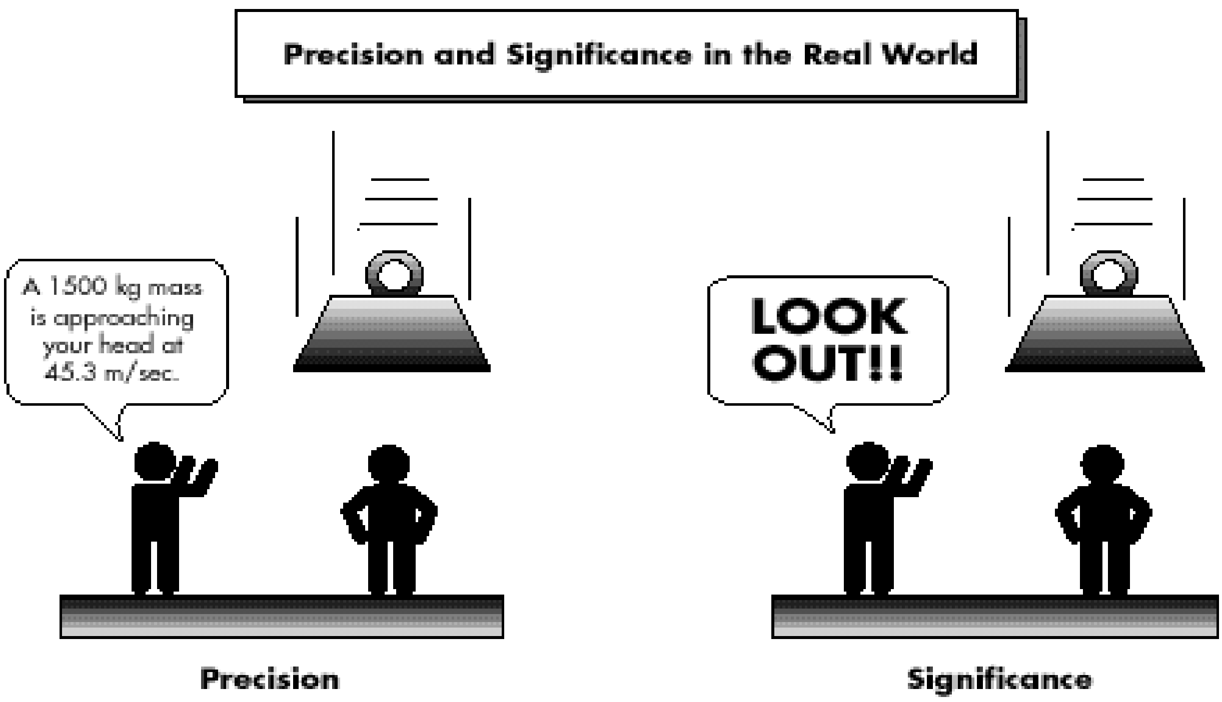
Incertesa i Imprecisió

- ***Incertesa:*** és la pèrdua d'informació o coneixement necessària per a reduir la complexitat a un nivell manejable.

  Exemple: Dir "avui farà sol" és més útil que utilitzar el percentatge exacte de núvols que cobreixen el cel.

- ***Imprecisió:*** es produeix quan la informació donada no és exacta.

  Exemple: Si la temperatura mesurada per un termòmetre es 42º C, dir que la temperatura està entre 40-45º C és imprecís.



Incertesa i Imprecisió en el Coneixement

■ El tractament d'aquesta inexactitud (imprecisió i/o incertesa) és un dels objectius de la lògica difusa.

■ La I.A. tracta la inexactitud (imprecisió i/o incertesa) en tres passos:

- En la descripció del coneixement, informació imprecisa i/o incerta.

  Exemple: La *temperatura* és **alta**. (**alta** és una informació imprecisa)

- En la descripció de les regles que han de raonar respecte aquesta informació.

  Exemple: Si la *temperatura* és **alta** estem a l'*estiu*.

  (La regla anterior pot ser certa o no).

- En l'avaluació de les regles (raonament), per deduir noves informacions, i per tant en la descripció d'aquests nous coneixements.

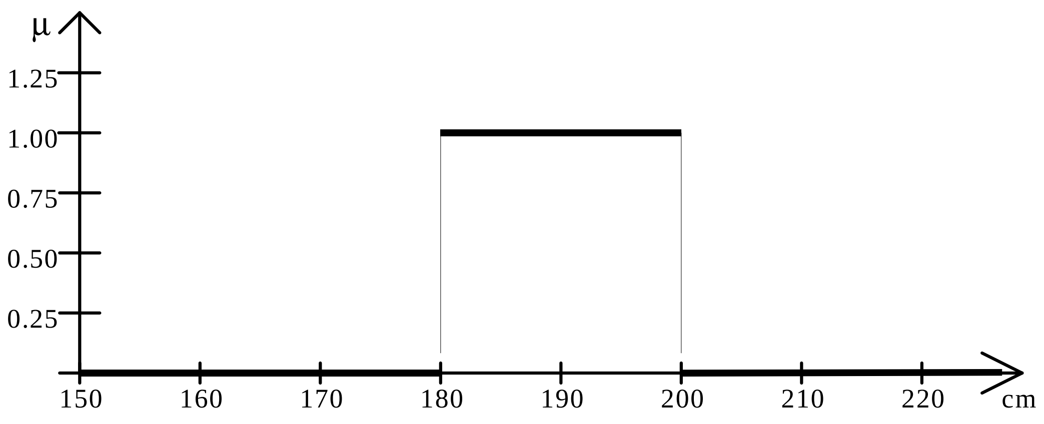
  Exemple: La conclusió de la regla anterior:

  Estem a l'estiu (és cert o no?).

Lògica Binària

■ ***Lògica binària:*** en aquesta el grau de pertinença d'una variable a un conjunt pot ser únicament membre (pertany) o no membre (no pertany). Existeix una distinció abrupta entre els elements membres i no membres.

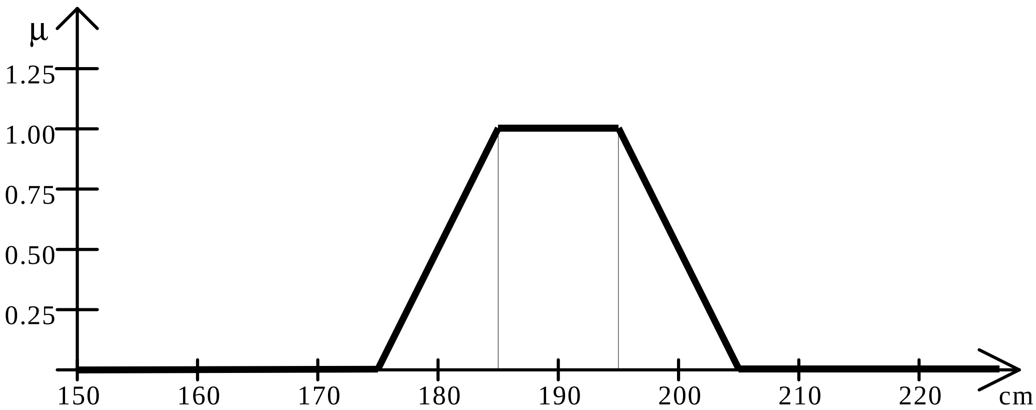
Per exemple: Es considera, segons la lògica binària que els homes alts medeixen entre 180 i 200 cm.



Lògica Fuzzy

- ***Lògica fuzzy:*** en aquesta, la idea de membre o no membre, es substitueix per un grau de pertinença de la variable a un o més conjunts. No existeix una distinció abrupta entre els conjunts, i una variable pot pertany a més d'un conjunt.

  Continuant amb el mateix exemple anterior, segons la lògica fuzzy, es considera homes alts a:



Funcions de Pertinença

- En la lògica binària, es denomina funció característica o discriminatòria al procés que permet determinar si un element (x) d'un univers (X) és o no membre d'un conjunt.

- En la lògica fuzzy, una funció continua i monòtona descriu la transició dels elements d'un univers que va des de la pertinença completa a la no pertinença. Aquesta funció característica (o discriminatòria) en la teoria de conjunts fuzzy és la que s'anomena "funció de pertinença".
  - La funció de pertinença a un conjunt fuzzy depèn de l'observador i del context.
  - No és el mateix que la probabilitat.

Variables Fuzzy

- La lògica difusa es centra principalment en la quantificació i el raonament sobre els termes imprecisos que apareixen en el llenguatge natural.

- Aquests termes imprecisos s'anomenen **variables lingüístiques** o **variables fuzzy**.

  Exemple: temperatura (fred, tibi, calent), alçada (baix, normal, alt), velocitat (lent, normal, ràpid), etc..

Regles Fuzzy

- El sistemes basats en la lògica fuzzy, utilitzen les variables lingüístiques en les **regles fuzzy.**
- Una regla fuzzy infereix informació sobre una variable lingüística, continguda en la seva conclusió, a partir de la informació sobre una altra variable, continguda en la seva premissa.

  Exemple:

"SI la *velocitat* és *lenta* LLAVORS fer que l'*acceleració* sigui *alta*"
(premissa) *(conclusió)*

- El rang de valors possibles d'una variable lingüística s'anomena el seu **univers de discurs (X)**.

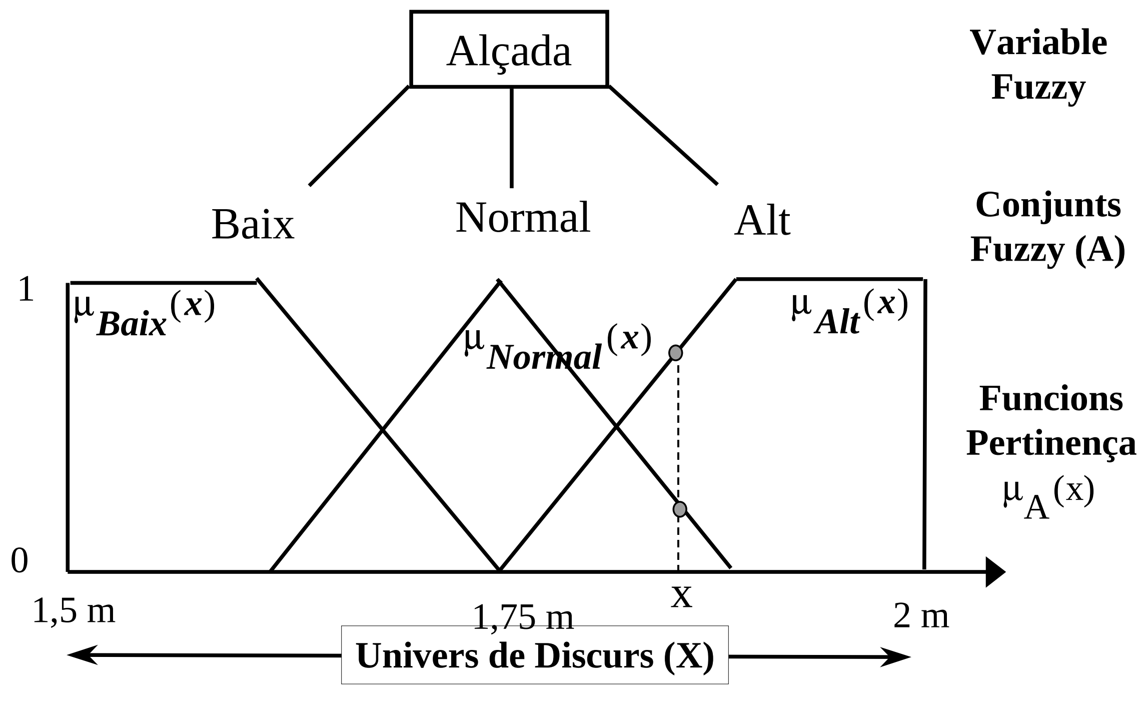
Conjunts Fuzzy

- Sigui **X** l'univers de discurs d'una variable fuzzy, essent x els seus elements. Un **conjunt fuzzy A** sobre **X** es caracteritza per una funció de pertinença $\mu_A(x)$ que associa cada element, **x**, a **A** amb un grau de pertinença.
- La **funció de pertinença** es defineix de la següent manera

$$\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$$

- Un conjunt difús es una extensió d'un conjunt tradicional, generalitzant el concepte de pertinença mitjançant la funció de pertinença, que retorna un valor entre 0 i 1, i que representa el **grau de pertinença** d'un objecte **x** al conjunt **A**.

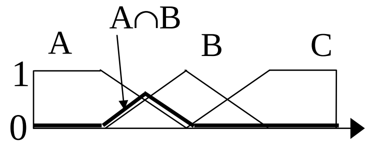
Exemple de Conjunt Fuzzy



Operacions entre Conjunts Fuzzy

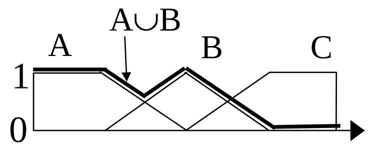
- **Intersecció**

$\mu_{A\cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ per a tot $x \in X$



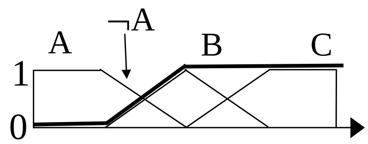
- **Unió**

$\mu_{A\cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$ per a tot $x \in X$



- **Complement**

$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x)$ per a tot $x \in X$



Inferència Fuzzy: Definició

- En la lògica clàssica la regla '*modus ponens*' s'utilitza per als raonaments (deduccions). Les proposicions següents mostren aquest raonament deductiu:
  - ***y*** és A
  - Si ***y*** és A llavors ***z*** és B.

  per deduir que quan ***y*** és A, ***z*** és B.
- Però que passa si ***y*** no és exactament A, sinó A'? -> lògica fuzzy
- En la lògica fuzzy, s'aplica pel raonament el '*modus ponens generalitzat*', és a dir si coneixem les premisses:
  - ***y*** és A'
  - Si ***y*** és A llavors ***z*** és B.

  podem deduir que ***z*** és B'.

Inferència Fuzzy: Definició

- La lògica fuzzy tracta un conjunt fuzzy com una proposició fuzzy, és a dir, una sentència que a assigna un valor a una variable lingüística, ***y***:

  y és A,

  on A és un conjunt fuzzy sobre l'univers de discurs X.
- Una **regla fuzzy** relaciona dues proposicions fuzzy:

  SI ***x*** és A LLAVORS ***y*** és B
- Els motors de inferència fuzzy emmagatzemen regles com a associacions difuses: així la regla anterior, s'emmagatzema mitjançant l'associació (A,B) en la matriu M. Aquesta associació s'anomena **Fuzzy Associative Memory** (FAM).
- Les dues **tècniques d'inferència fuzzy** més emprades són: **max-min** i **max-product**.

Inferència Fuzzy: Tècniques

La determinació de la matriu M que conté les associacions difuses definides a través de les regles del motor d'inferència es pot fer mitjançant:

- **Inferència Max-Min**: cadascun dels elements de la matriu M es determinen

$$m_{ij}=\text{certesa}(a_i \rightarrow b_j)=\min(a_i,b_j)$$

- **Inferència Max-Product**: cadascun dels elements de la matriu M es determinen

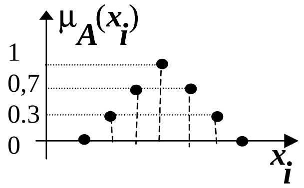
$$m_{ij}=\text{certesa}(a_i \rightarrow b_j)=a_i b_j$$

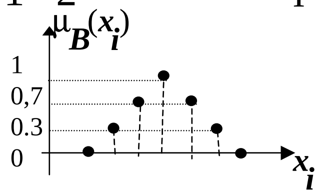
Determinació de la Matriu M: Exemple

IF **A** THEN **B**

$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ on $a_i=\mu_A(x_i)$

$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ on $b_i=\mu_B(x_i)$





M?

min

$m_{ij}=\text{certesa}(a_i \rightarrow b_j)=\min(a_i,b_j)$

i\j	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0
3	0	0.3	0.7	0.7	0.7	0.3	0
4	0	0.3	0.7	1	0.7	0.3	0
5	0	0.3	0.7	0.7	0.7	0.3	0
6	0	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0
7	0	0	0	0	0	0	0

prod

$m_{ij}=\text{certesa}(a_i \rightarrow b_j)=a_i b_j$

i\j	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	.09	.21	0.3	.21	.09	0
3	0	.21	.49	0.7	.49	.21	0
4	0	0.3	0.7	1	0.7	0.3	0
5	0	.21	.49	0.7	.49	.21	0
6	0	.09	.21	0.3	.21	.09	0
7	0	0	0	0	0	0	0

Inferència Fuzzy: Regla d'Inferència

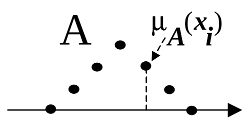
- La inferència del conjunt difús conclusió a partir del conjunt difús premissa s'obté a partir de la multiplicació entre vectors i matrius difusos, a través de l'anomenada **regla composicional d'inferència**
- Suposem que aquesta operació s'aplica a la regla:

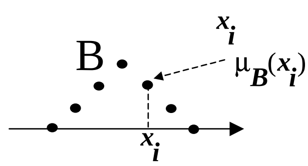
SI A LLAVORS B

- on A es un conjunt fuzzy definit sobre X i B és un conjunt fuzzy definit sobre Y:

$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ on $a_i=\mu_A(x_i)$

$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ on $b_i=\mu_B(x_i)$





Inferència Fuzzy: Regla d'Inferència

- Sigui M la matriu de regles fuzzy FAM (determinada prèviament mitjançant la tècnica max-min o max-product), llavors la regla composicional d'inferència estableix que el conjunt B inferit a partir del conjunt A es determina

$$B = A \circ M$$

on cadascuna de les components b_j es determina

$$b_j = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \min\left(a_i, m_{ij}\right) \right\}$$

- Aquesta operació es similar a la multiplicació clàssica entre vectors i matrius, substituint el producte pel mínim i la suma pel màxim.

Inferència Fuzzy: Regles Multi-premissa

- Fins ara hem vist regles del tipus: IF A THEN B, però a la pràctica s'utilitzen regles multi-premissa:

IF A AND B THEN C.

- Com es determina la matriu M en aquests casos?
- La solució consisteix en definir en primer lloc una matriu M per a cada premissa (per exemple: M_{AC} i M_{BC}), així:

$$A' \circ M_{AC} = C_{A'}$$
$$B' \circ M_{BC} = C_{B'}$$

- Finalment, s'han de composar els conjunts $C_{A'}$ i $C_{B'}$ per obtenir un C'. La composició dependrà de si les premisses estaven unides amb un AND, o bé, amb un OR.

Inferència Fuzzy: Múltiples Regles

- Finalment, considerarem la situació en la que tenim **n regles fuzzy (A_i, B_i).** Aquesta situació ens porta a **n** matrius M per a codificar les associacions entre A_i i B_i.
- L'objectiu es obtenir el conjunt difús B' a partir del conjunt difús A': per això aplicarem A' al banc de regles produint un conjunt difús B'_i per a cadascuna d'elles.
- Finalment combinarem cada conjunt difús B'_i fent ús de l'operador unió per obtenir B':

$$B' = B'_1 \cup B'_2 \cdots \cup B'_n$$

Inferència Fuzzy: Defuzzificació

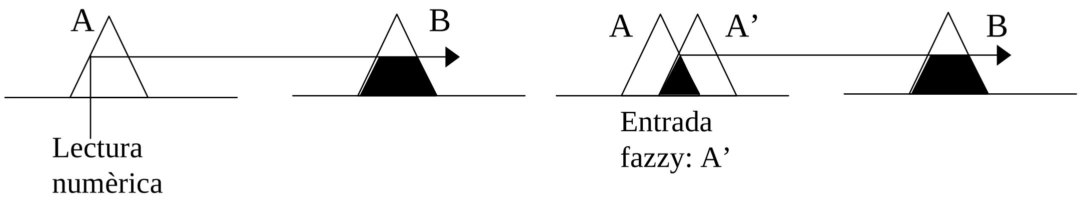
- Fins ara hem vist com obtenir un conjunt fuzzy B' a partir d'un conjunt fuzzy A'. En la majoria d'aplicacions pràctiques s'ha obtenir un valor a partir del conjunt fuzzy B'. A aquest procés se l'anomena **defuzzificació**.
- La tècnica de defuzzificació més emprada és el mètode del **centre de gravetat** fuzzy:

$$y_i = \frac{\sum_{j=1}^{p} y_j \mu_{B'}(y_j)}{\sum_{j=1}^{p} \mu_{B'}(y_j)}$$

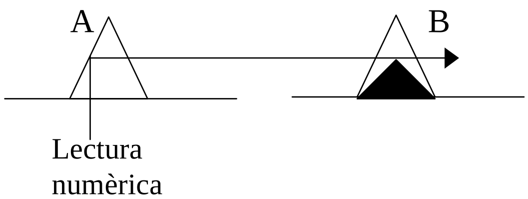
Max-min versus Max-product

- Per una única regla: **IF** A **THEN** B (A→B)

max-min



max-product **IF** A **THEN** B (A→B)

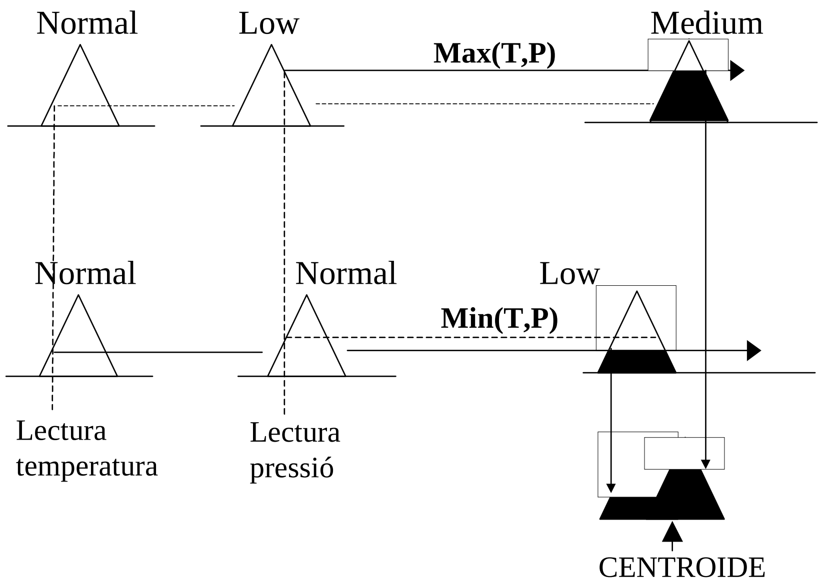


Max-min versus Max-product

- Per múltiples regles: **max-min**

IF T=Normal
OR P=Low
THEN V=Medium

IF T=Normal
AND P=Normal
THEN V=Low



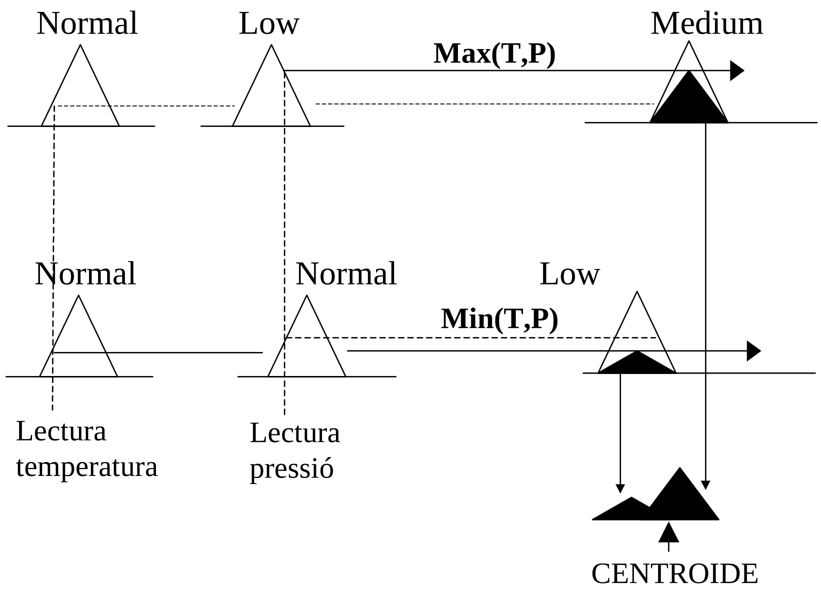
Max-min versus Max-product

- Per múltiples regles:

max-product

IF T=Normal
OR P=Low
THEN V=Medium

IF T=Normal
AND P=Normal
THEN V=Low



Construcció d’un Sistema Fuzzy

Per arribar a construir un sistema basat en lògica fuzzy s’han de seguir els següents passos:

1. Definició del problema

2. Definició de les variables lingüístiques

3. Definició dels conjunts difusos

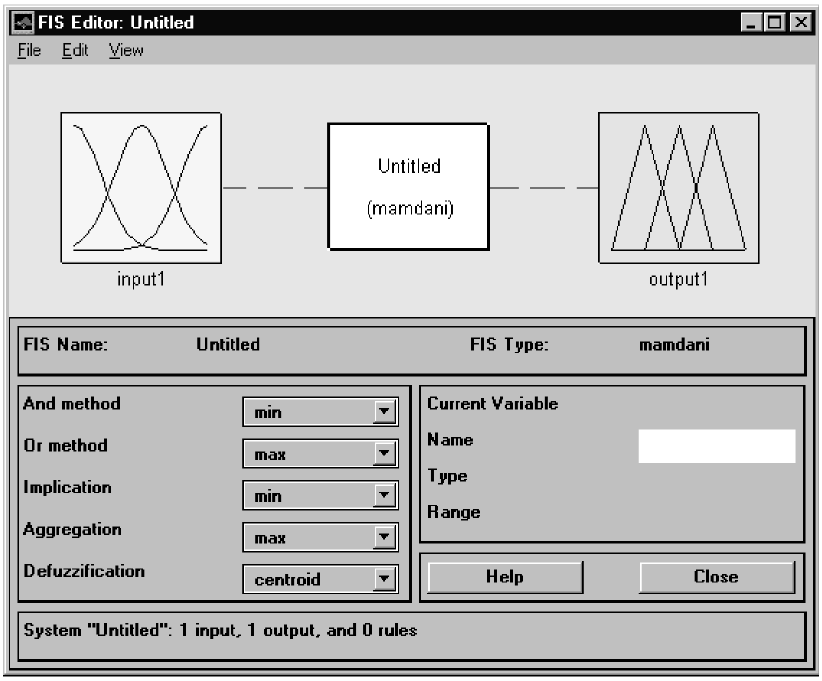
4. Definició de les regles fuzzy

5. Construcció del sistema

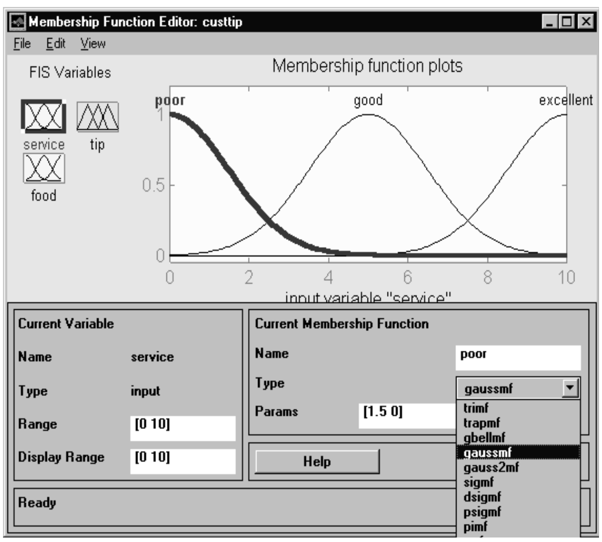
6. Test del sistema

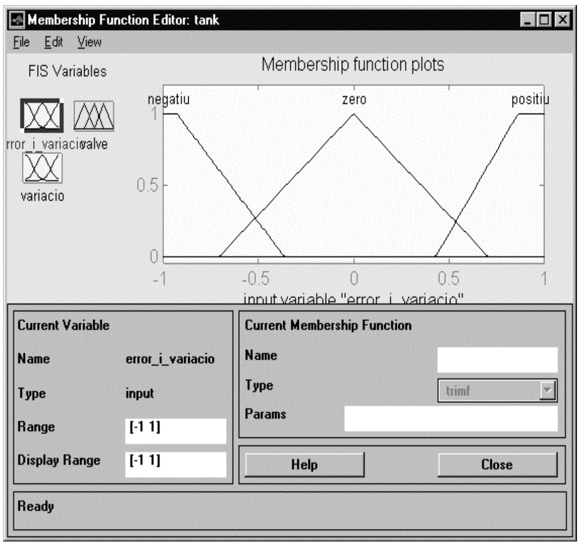
7. Ajust del sistema

MATLAB: FIS Editor



Editor de funcions de pertinença





Funcions de pertinença (I)

TRIANGULAR

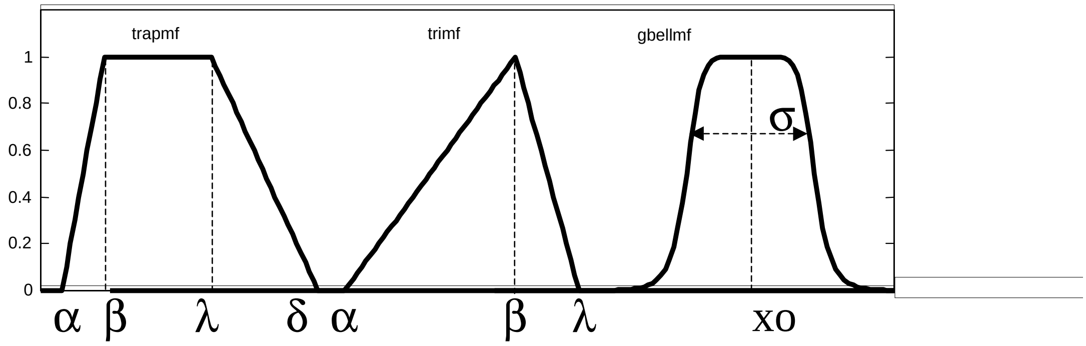
$$\mu(x)=\begin{cases}0 & x\in(-\infty,\alpha)\\ \dfrac{1}{\beta-\alpha} & x\in(\alpha,\beta)\\ \dfrac{1}{\gamma-\beta} & x\in(\beta,\gamma)\\ 0 & x\in(\gamma,\infty)\end{cases}$$

TRAPEZOIDAL

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & x\in(-\infty,\alpha)\\ \dfrac{1}{\beta-\alpha}(x-\alpha) & x\in(\alpha,\beta)\\ 1 & x\in(\beta,\gamma)\\ \dfrac{1}{\delta-\lambda}(\delta-x) & x\in(\gamma,\lambda)\\ 0 & x\in(\delta,\infty)\end{cases}$$

Bell shaped

$$\mu(x)=e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$



Funcions de pertinença (II)

-S- shaped

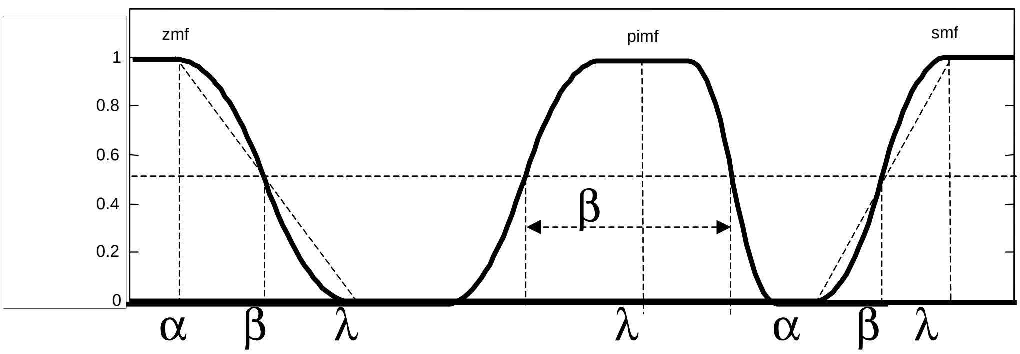
$$\mu(x)=\begin{cases}0 & x\in(-\infty,\alpha)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2 & x\in(\alpha,\beta)\\ 1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\gamma}{\gamma-\beta}\right)^2 & x\in(\beta,\gamma)\\ 1 & x\in(\gamma,\infty)\end{cases}$$

Z-Shaped

$$\mu(x)=\begin{cases}1 & x\in(-\infty,\alpha)\\ 1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2 & x\in(\alpha,\beta)\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-\gamma}{\gamma-\beta}\right)^2 & x\in(\beta,\gamma)\\ 0 & x\in(\gamma,\infty)\end{cases}$$

-π - shaped

$$\mu(x)=\begin{cases}S(x;\gamma-\beta;\gamma-\beta/2;\gamma) & x\in(-\infty,\gamma)\\ 1 & x=\gamma\\ 1-S(x;\gamma;\gamma+\beta/2;\gamma+\beta) & x\in(\gamma\infty)\end{cases}$$



Funcions de pertinença (III)

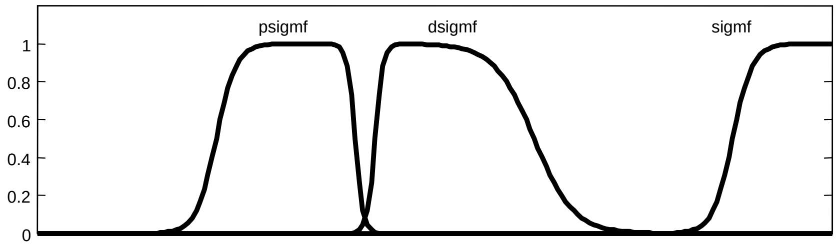
Sigmoidal $\mu(x) = \frac{1}{1+e^{-a(x-x_o)}}$

P-Sigmoidal

$$\mu(x) = \mu_{SIGM\_1}(x) \cdot \mu_{SIGM\_2}(x) = $$
$$= \frac{1}{1+e^{-a_1(x-x_1)}} \cdot \frac{1}{1+e^{-a_2(x-x_2)}}$$

D-Sigmoidal

$$\mu(x) = \mu_{SIGM\_1}(x) - \mu_{SIGM\_2}(x) = $$
$$= \frac{1}{1+e^{-a_1(x-x_1)}} - \frac{1}{1+e^{-a_2(x-x_2)}}$$



Mètodes de defuzzificació (I)

<u>Màxim valor (MAX):</u>

Es pren el valor que correspon a un màxim de la funció de pertinença del conjunt resultant de la decisió.
Problemes quan el màxim no és únic (sinó una zona). Llavors es pot escollir el màxim de valor major (LOM) o menor (SOM), en valor absolut.

<u>Promig de màxims (MOM. Mean of Max):</u>

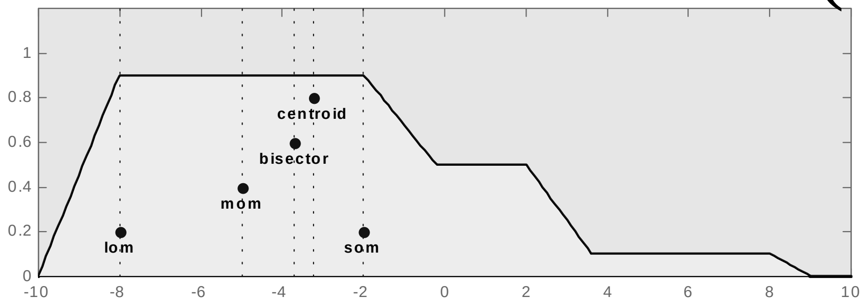
Quan el màxim no és únic, es pot promitjar:

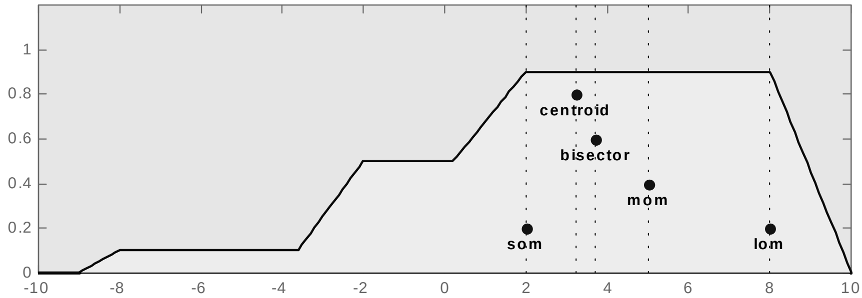
$$y_i = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} y_j \qquad / \mu(y_j) = max \; .$$

<u>Centre de gravetat:</u>

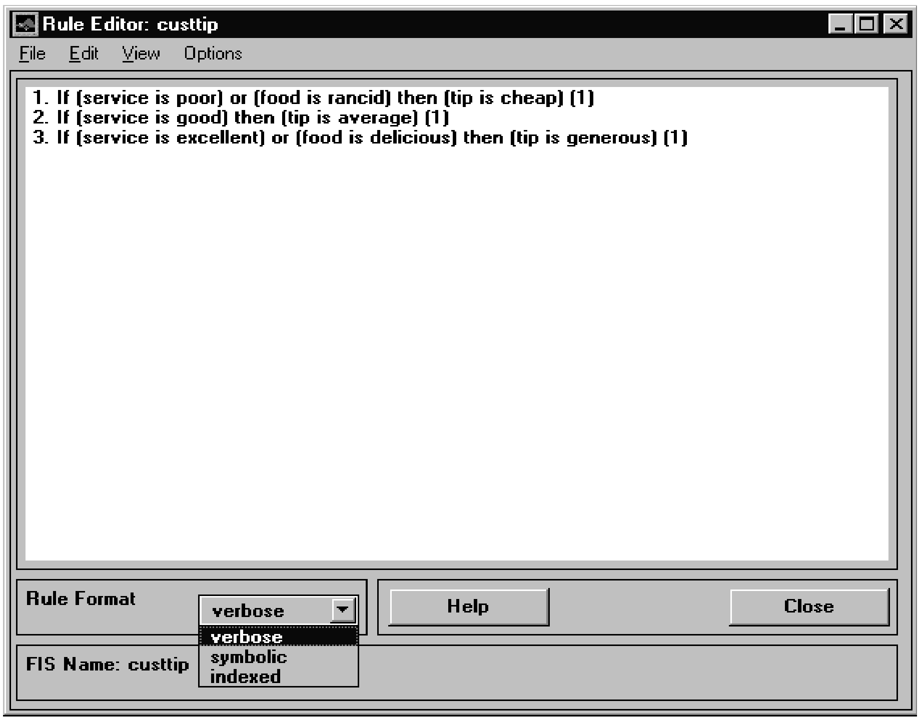
$$y_i = \frac{\sum_{j=1}^{p} y_j \mu_{B'}(y_j)}{\sum_{j=1}^{p} \mu_{B'}(y_j)}$$

Mètodes de defuzzificació (II)

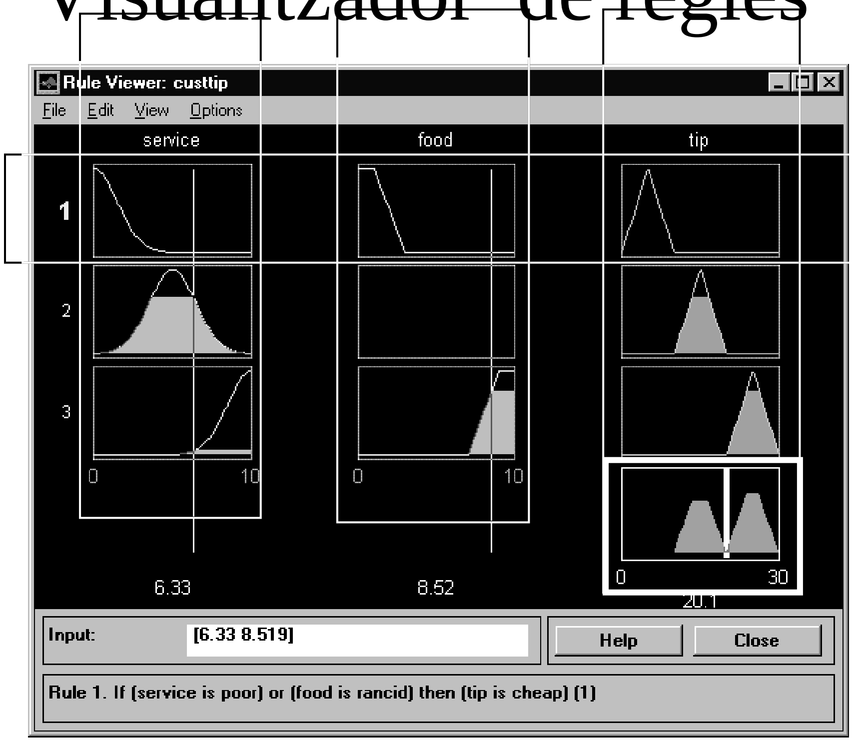




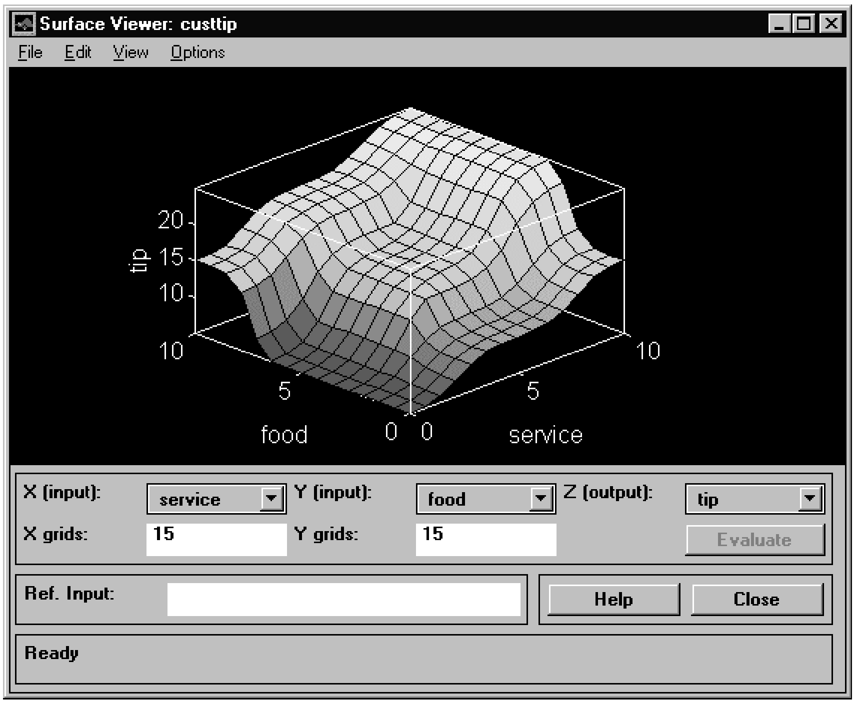
Editor de regles



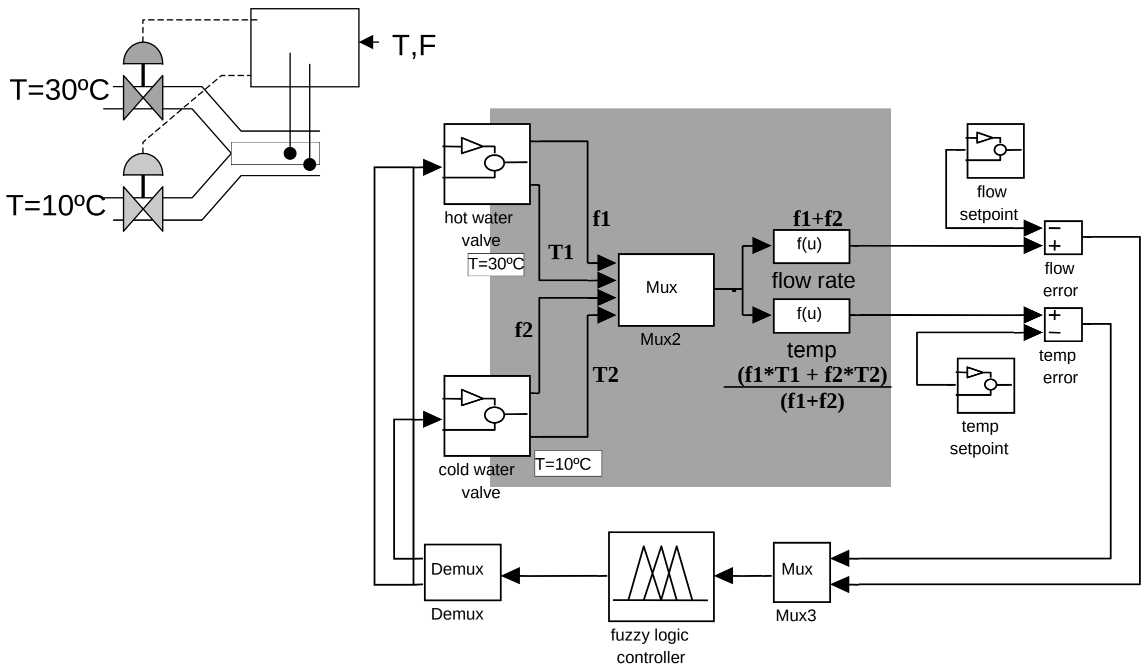
Visualitzador de regles



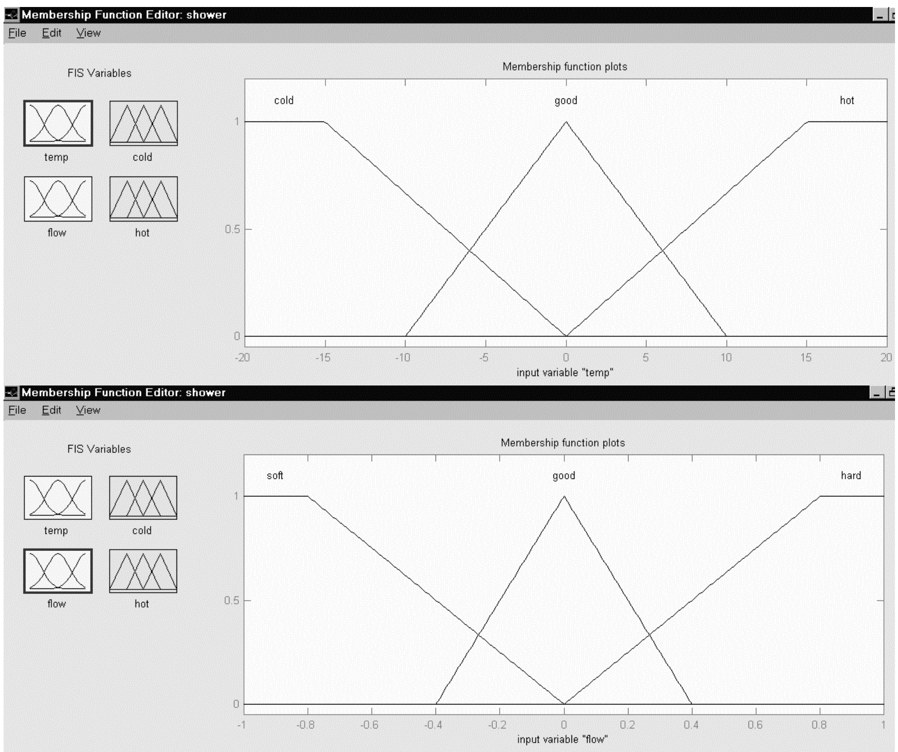
Superfície entrada-sortida



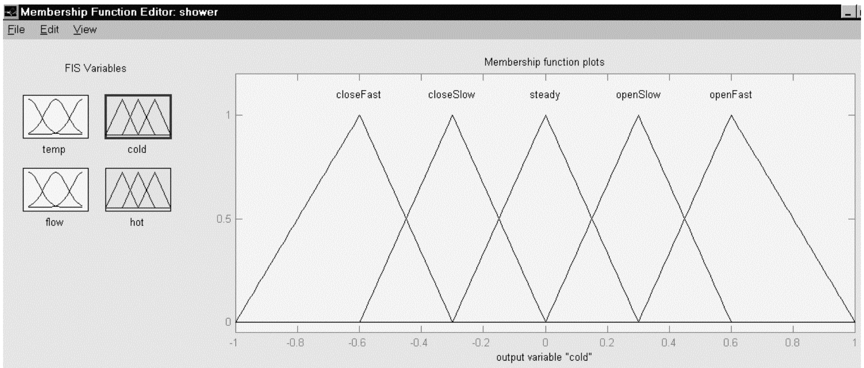
Exemple: Control de cabal i temperatura

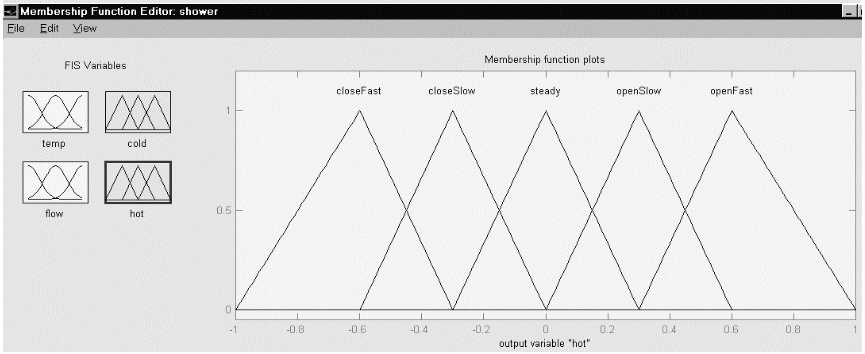


Conjunts de temperatura i cabal



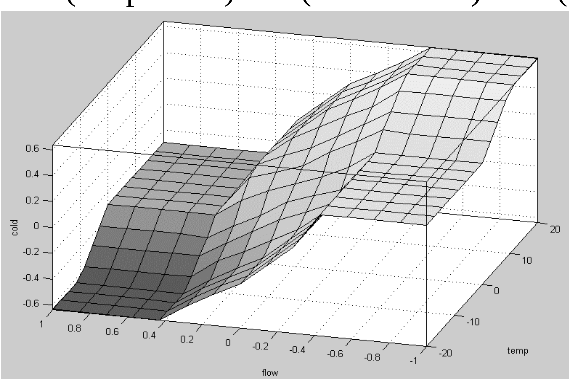
Definició de conjunts de sortida

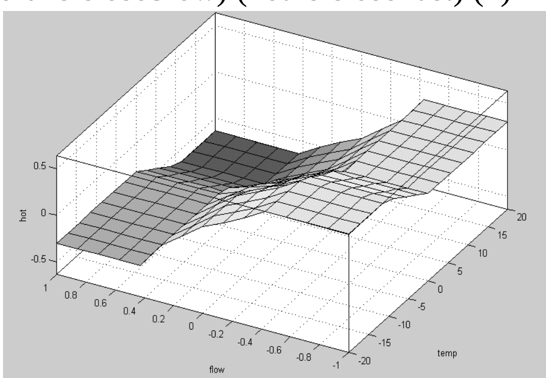




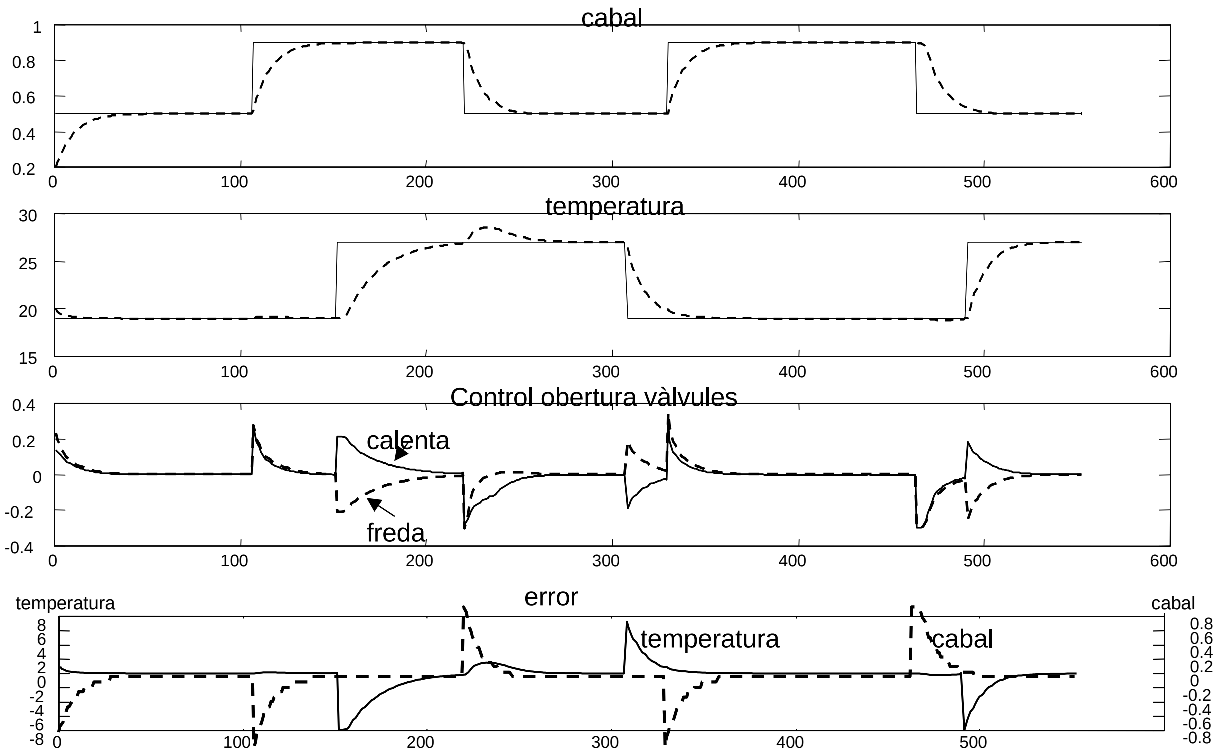
Regles

1. If (temp is cold) and (flow is soft) then (cold is openSlow) (hot is openFast) (1)
2. If (temp is cold) and (flow is good) then (cold is closeSlow) (hot is openSlow) (1)
3. If (temp is cold) and (flow is hard) then (cold is closeFast) (hot is closeSlow) (1)
4. If (temp is good) and (flow is soft) then (cold is openSlow) (hot is openSlow) (1)
5. If (temp is good) and (flow is good) then (cold is steady) (hot is steady) (1)
6. If (temp is good) and (flow is hard) then (cold is closeSlow) (hot is closeSlow) (1)
7. If (temp is hot) and (flow is soft) then (cold is openFast) (hot is openSlow) (1)
8. If (temp is hot) and (flow is good) then (cold is openSlow) (hot is closeSlow) (1)
9. If (temp is hot) and (flow is hard) then (cold is closeSlow) (hot is closeFast) (1)





Resultats



Sistemes fuzzy funcionals. (Takagi-Sugeno)

Mètode Mamdani (1975)

<u>Característiques:</u>

- Les funcions de pertinença de la sortida son conjunts fuzzy.
- Les deduccions de les regles donen conjunts fuzzy i posteriorment s'ha d'emprar un mètode de defuzzificació per obtenir un valor numèric.

- Ex:

SI **x es A** AND y es B THEN z es C

A, B, C son conjunts fuzzy.

Mètode Takagi-Sugeno:

<u>Característiques:</u>

- Les funcions de pertinença de la sortida son valors numèrics (*singletons)*.
- Millora el procés de defuzzificació: doncs consisteix en ponderar aquests valors numèrics d'acord amb la certesa de les regles que els dedueixen. (Predefuzzificació).
- Ex:

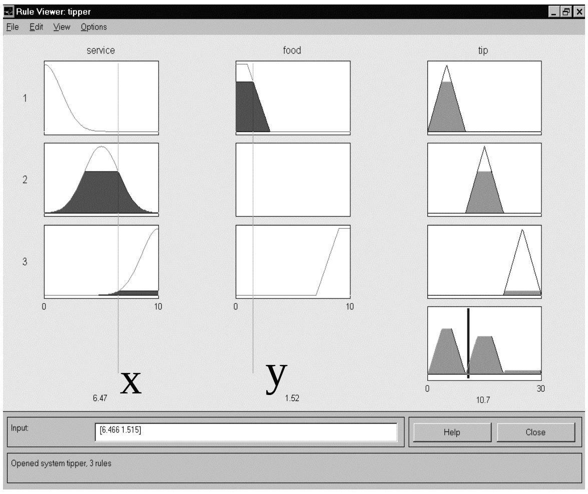
SI **x és A** AND **y és B** THEN **z=k**

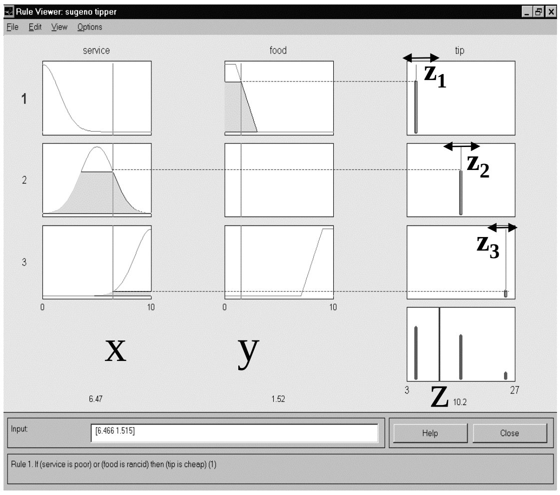
x,y,z i k son números. **k=f(x,y)**

Mamdani - Sugeno

REGLES:

1. If (service is poor) or (food is rancid)	then (tip is cheap)	$z_1(x,y)$
2. If (service is average)	then (tip is average)	$z_2(x,y)$
3. If (service is good) or (food is delicious)	then (tip is generous)	$z_3(x,y)$



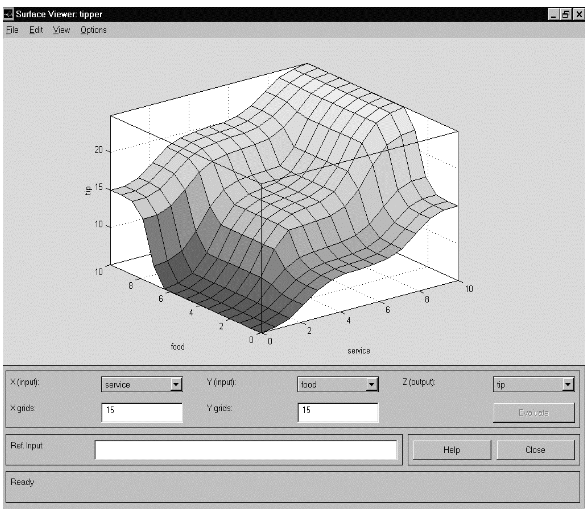


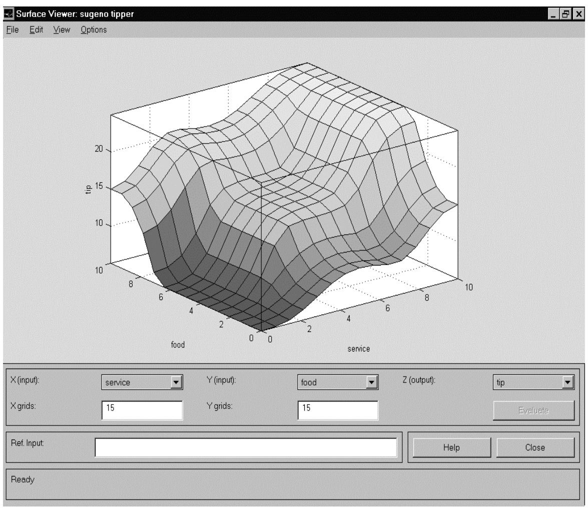
Defuzzificació: C**ENTROIDE d'un conjunt.**

PROMIG PONDERAT de funcions:

$$Z = \frac{\sum_i \mu_{inf}(z_i) z_i}{\sum_i \mu_{inf}(z_i)} \qquad z_i = f_i(x,y) = x*p_i + y*q_i + r_i$$

Mamdani-Sugeno: Superfíces entrada -sortida





Exemple Sugeno: Commutació entre dues relacions entrada-sortida lineals.

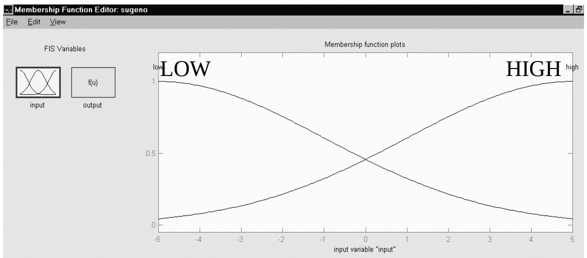
Depenent del valor de la variable d'entrada (ALT/BAIX), volem que la sortida segueixi una llei o una altra (line1/line2)

REGLES

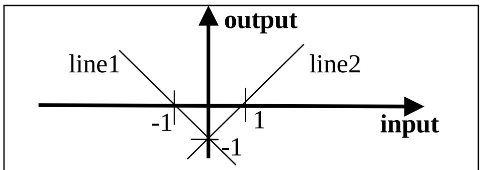
1. If (input is low) then (output is line1)

2. If (input is high) then (output is line2)

Variable Entrada: **input**



Variable Sortida: **output**

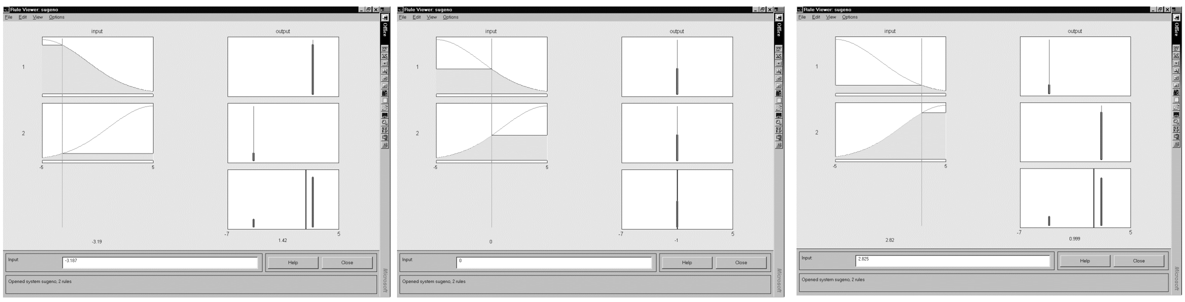


line1 = (-1) * input +(-1)

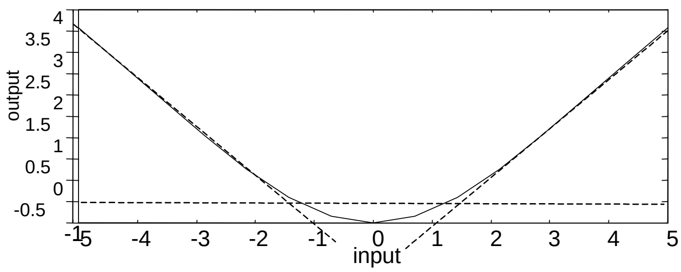
line2 = (1) * input +(-1)

Exemple Sugeno (II): inferència

Sortida per diverses entrades:



Relació entrada /sortida:

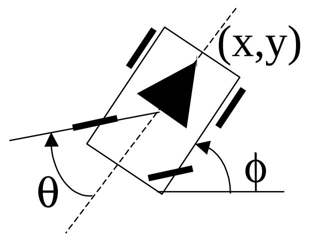


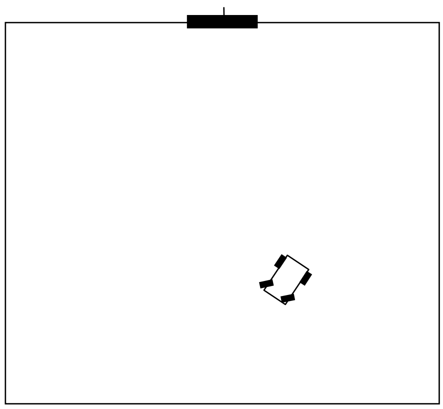
Camp d'aplicació:

conmutació entre lleis de control depenent dels valors de l'entrada

Exemple: Control de la direcció d'un vehícle.

Objectiu: aparcar el vehícle perpendicular al moll de descàrrega (d'esquenes).





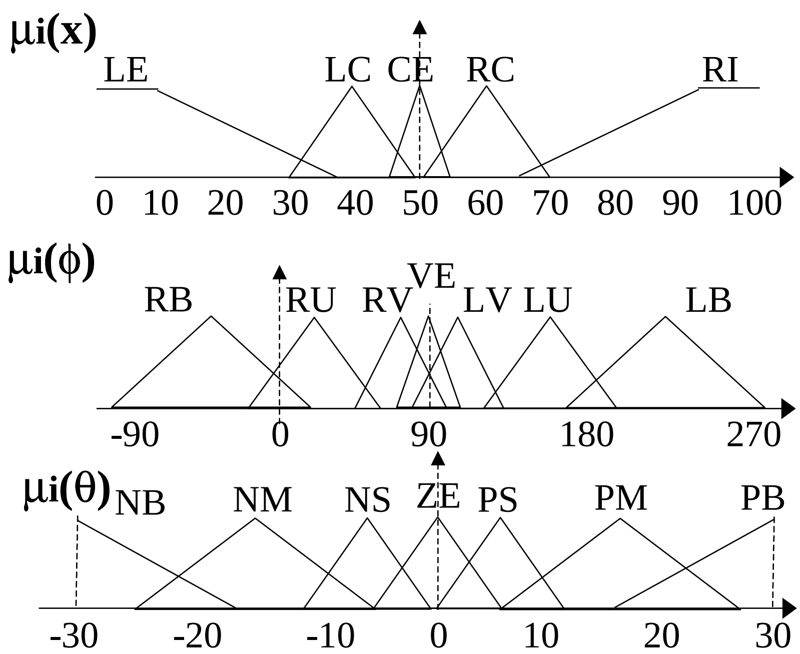
Variables mesurades:
ϕ, angle del vehícle.
(x,y) coordenades del vehícle respecte el moll (distància)

Variables de control:
θ, angle de les rodes (direcció)

Suposem: velocitat constant i que el vehícle es mou cap enrera únicament.

Exemple: Control de la direcció d'un vehicle (II)

Funcions de pertinença



DV, Right Below
RU, Right Upper
RV, Right Vertical
VE, Vertical
LV, Left Vertical
LU, Left Upper
LB, Left Below

LE, Left
LC, Left Center
CE, Center
RC, Right Center
RI, Right

NB; Negative Big
NM, Negative Medium
NS, Negative Short
ZE, Zero
PS, Positive Small
PM, Positive Medium
PB, Positive Big

Exemple: Control de la direcció d'un vehicle (III)

Base de regles

ϕ\ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NM