MODELITZACIÓ DE SISTEMES DINAMICS HÍBRIDS MITJANÇANT DESCOMPOSICIÓ DE L'ESPAI D'ESTAT

Santi Esteva.
Dept. Electrònica Informàtica i Automàtica de la Universitat de Girona
Av. Lluís Santaló s/n Tel. 972418478

INTRODUCCIÓ

La modelització de sistemes dinàmics complexos, com a un conjunt de sistemes lineals e invariants d'ordre simple, permet l'anàlisi i l'interpretació del comportament del sistema, en la seva evolució temporal. L'anàlisi d'estabilitat dels models locals, en la commutació de models, i la verificació del sistema, es pot realitzar amb la descomposició del sistemes en models locals.

Diferents autors han treballat la descomposició del espai d'estat en regions valides per a models locals,[1][2][3] Johansen 96, Sontag 81,models TS, però tots ells realitzen una partició del espai d'estat amb uns límits fix , i per tant unes regions predefinides, e invariants. La modelització que es proposa, genera una partició de l'espai d'estat no fixa, i dependent del recorregut que realitzin les variables d'estat, la qual cosa permet una acurada aproximació del sistema original, en amplitud, i amb dinàmica, especialment útil per a sistemes no lineals de guany, i de dinàmica a aproximar per sistemes d'ordre elevat.

MODELITZACIÓ

La modelització de sistemes híbrids, aquells en que participen variables continues i discretes, i que es troben interrelacionades, prenen en compte els esdeveniments discrets, que provoquen canvis de comportament sobre les variables continues, aprofiten de la següent metodologia, l'unificació de l'ordre dels models, estalviant la problemàtica de la commutació entre models d'ordre diferent, que implicaria un esforç extra de càlcul en cas d'aplicar l'agregació d'estats. A la nostra proposta els models locals son representats únicament per models d'espai d'estat de segon ordre.

$$\dot{x}(t) = A_1 \; x(t) + B_1 \; U(t)$$
$$y(t) = C_1 \; x(t)$$

Els límits del model que aproxima el comportament dins d'una regió, venen marcats per un interval d'amplitud vàlid per la sortida, i d'un interval vàlid de la dinàmica donat per la transformació $g(x_1, x_2) \;\; R^2 \rightarrow R$ que mesura l'angle format pels increments de les variables d'estat del model local $\alpha = \operatorname{atan}(\Delta x_1 / \Delta x_2)$, representat en un pla polar d'angle i l'amplitud de la sortida del sistema. Considerem un conjunt de models de referència de segon ordre que responen al senyal d'entrada aplicat al sistema i que regularment s'ajusten amb el valor de la sortida del sistema.

La fase d'identificació es realitza per regions del senyal de sortida, com a resposta del senyal d'entrada, i analitzant l'error de predicció $\left| y - \hat{y} \right| \leq \varepsilon$, determinant models al pla Y-Alfa, fins a completar els 360 graus, i l'amplitud màxima de sortida del sistema (fig1). Formant un gràfic de regions de models en forma de sectors circulars superposats, segmentats per angles límits de validesa del model.

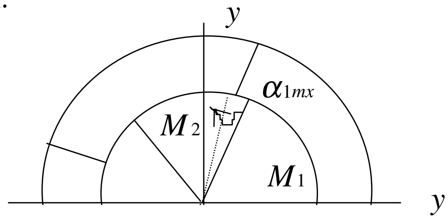

Fig.1

Un cop determinats tots els models locals que composen el sistema, es realitza un graf de transició d'estat amb les possibles evolucions dels models, d'un model k a un k+1, a k-1, i al model inicial , i als superiors col·laterals en amplitud (fig2).

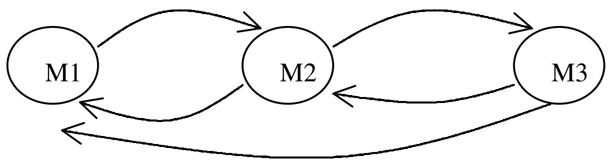

Fig.2

La commutació entre models es permesa, si hi ha una variació d'amplitud de sortida superior al nivell de soroll sobre el senyal d'entrada, a fi efecte d'evitar la commutació successiva de models com a seguiment del soroll de mesura, que pot provocar l'acumulació de l'error de modelat.

MODEL HÍBRID

El model híbrid [4] resultant esta format per la vuit tupla següent:

- Q_h es el conjunt de representacions plans alfa, DS
- $\sum SP$ conjunt d'estats discrets dins DS
- $X \in R^2$ un vector d'estat bidimensional associat a una ODE de 2^n ordre en cada SP
- Conjunt finit d'estats discrets $\{e_i\}$, generats internament en creuar les regions SP
- $\Omega : SP \times e \to SP$ funció de transició d'estat dins del pla alfa.
- Conjunt finit d'estats discrets $\{V_i\}$, generats internament o pel supervisor.
- $\Psi : DS \times V \to DS$ funció de transició d'estats entre plans alfa.
- Senyal de control continua $U(t)$

L'espai d'estat discret DS (o α-plans), es un conjunt de regions continues de l'espai d'estat $DS_i = \sum SP_j$, on SP_j es una regió limitada pels límits $[b_i, b_j]$, com un sistema (LTI) lineal e invariant en el temps, i dinàmica $\dot{x} = Ax + Bu$ amb vector d'estat $\dot{x} = \{x_1, x_2\}$

$Q_h = \sum \{DS_i\}$ una part de la representació del model complert del sistema. $Q_h \subset Q_s$, la part que el model híbrid modelitza.

Les transicions discretes canvien la representació del sistema de l'espai d'estat, dins DS [7] , o entre α-plans $DS_i \to DS_j$, i essent les funcions de transició:

$\Omega : SP \times e \to SP$ Determina els següents coeficients del model local en resposta al límit creuat. Aquesta funció determina les condicions inicials per iniciar el model , a partir d'un escalat dels valors finals per adaptar-los com a valors inicials del proper model per estalviar salts d'amplitud en les variables de sortida.

$\Psi : DS \times V \to DS$ Determina l'acció discreta a prendre , el nou alfa-graph a utilitzar i el nou model local de partida, com a resposta de la transició discreta produïda [5]. La funció de transició Ω determina la resta dels paràmetres per evolucionar el sistema en el sentit desitjat.

EXEMPLE

Aplicat al model no lineal següent:

$$y(t) = -2\frac{dy}{dt} - 5\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^3y^2}{dt^3} + U\ (t)$$

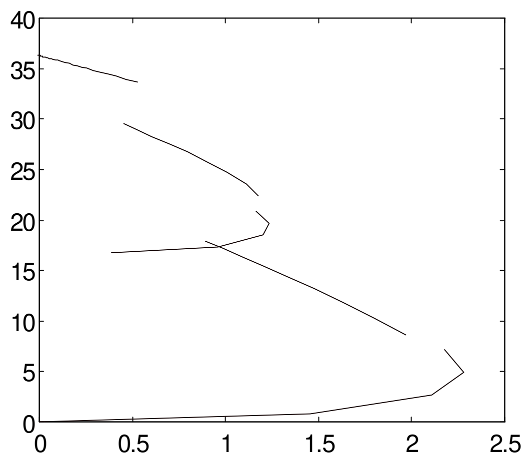

Fig.3

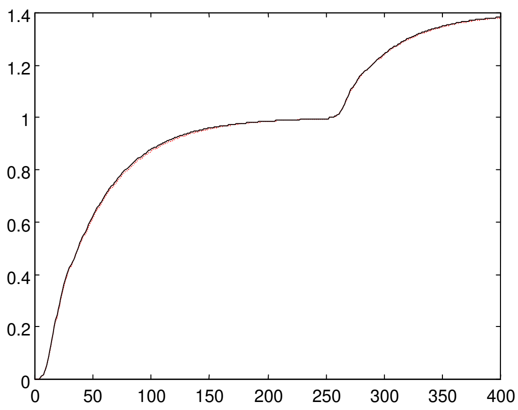

Fig.4

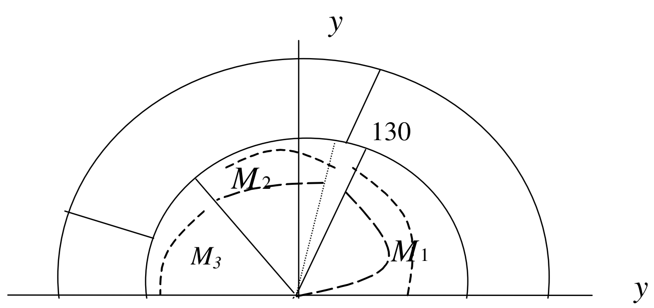

Fig.5

Figures 3,4,5 : Resposta a dos escalons proporcionals: l'espai d'estat, l'evolució temporal, i en el pla alfa.

OPTIMITZACIÓ

Disposar de models locals lineals, permet emprar eines clàssiques de control i optimització. En el cas d'optimitzar una trajectòria que transcorre per diferents estats i models, la resolució de l'equació de Bellman per a un conjunt d'estats dona la solució al problema [9] de la minimització del criteri:

$$V^*(x) = \min_{p\in\Pi}\left\{g(x,p) + V^*(x'(x,p))\right\},$$

Suposant que el conjunt d'estats considerats es el correcte, si mai la trajectòria de l'òptim transcorre pels límits de la regió. Els arguments son la funció de cost continua de cada tram mes el pes de les transicions discretes, sota els límits $u_l \le u_i \le u_p$ resultant un problema convex d'optimització multi-criteri.

En l'optimització d'una seqüència lineal d'estats, aquest problema es segmenta en l'optimització de trajectòries per parelles consecutives d'estats, de forma que l'interacció d'entre ells es va propagant fins que en successives seqüències la variació es nul·la.

ABSTRACCIÓ CONTÍNUA

L'anàlisi del comportament global del sistema s'estudia mitjançant la teoria i les eines d'en Ramadge i Wonham,[10] aplicada al model discret, determina els camins possibles sota control de l'autòmat $\overline{K}\,\Sigma_u \cap L(G) \subseteq \overline{K}$, essent K la seqüència de control, i L(G) el llenguatge generat pel sistema controlat, que permeten conduir el sistema des de l'origen a l'estat final desitjat, i sota la presencia dels esdeveniments que es puguin produir espontàniament previstos en el sistema Σ_u . Dona com a resultat la unió de tots els recorreguts adequats (Supremal Controlable)

$$\sup C(L) := \bigcup\{K : K \subset L \; and \; K \; is \; controllable\}$$

que serà objecte d'estudi per triar el de cost inferior, o el mes adequat. També existeixen en el sistema esdeveniments no observables, essent el conjunt d'esdeveniments $\Sigma=\Sigma_o \cup \Sigma_{uo}$ la unió dels esdeveniments observables i els no observables i complint $\Sigma_o \cap \Sigma_{uo} = 0$

on $\Sigma_c \subseteq \Sigma_o$

L'aplicació de la teoria d'esdeveniments discrets en els sistemes híbrids, es pot realitzar fent abstracció de la part continua, modificant el conjunt d'esdeveniments incontrolables per una projecció que elimina d'aquest set d'esdeveniments, aquells que permeten ésser controlats per la comanda sobre les variables continues. Altre projecció realitzada sobre els esdeveniments inobservables, redueix el conjunt aquells esdeveniments identificables per canvis de comportament sobre les variables continues [6]. Durades de temps i sobrepassament de llindars en les variables continues poden ésser representades com esdeveniments en el sistema.

Definim les projeccions $\Sigma'_{uc} = P(\Sigma_{uc})$, i amb $\Sigma'_{uc} \subseteq \Sigma_{uc}$, la projecció que elimina alguns esdeveniments incontrolables.

I $\Sigma'_{uo}= P(\Sigma_{uo})$, i $\Sigma'_{uo} \subseteq \Sigma_{uo}$, la projecció que elimina alguns esdeveniments no observables.

El temps i variables continues també poden ésser aplicat al DES amb els esdeveniments generats per una funció depenent de la variable i el llindar: $\delta=f(t, t_f)$, $\delta=f(x, x_f)$, $\delta\in \Sigma_c$

ANÀLISI HÍBRID

L'anàlisi del cost del recorregut o la viabilitat d'alguna variable continua, s'analitza mitjançant eines de verificació de sistemes híbrids que utilitzen lògiques temporals amb mesura del temps abstracte o intervalar, com el Hytech,[11] que permet avaluar el temps entre dos esdeveniments, l'arribada o no a un determinat estat, i les condicions per a assolir un estat. Permet també aquesta eina realitzar els càlculs amb paràmetres intervalars, que poden representar incerteses de modelat i rangs de pertorbacions.

El sistema Hytech permet analitzar :
Safety : $\Box\neg\phi$
Possibility : $\Box\Diamond\phi$
Persistence : $\Diamond\Box\phi$
Bounded response : $\Box\ (a\Rightarrow \Diamond_{<\alpha}\ b)$
Minimal event separation : temps entre dos esdeveniments.
Essent els símbols lògics temporals:
$\Box$ operador sempre.
$\Diamond$ operador de vegades.
ϕ propietat a analitzar.

CONCLUSIONS

Aquest tipus de representació de models no lineals com a conjunt seqüencial de models locals, permet representar models amb fortes no linealitats, histèresi, amb salts, amb espais d'estat incomplets, i especialment ben aproximats, amb respecte d'altres metodologies Tagaki-Sugeno, Narmax, per a sistemes amb dinàmiques particulars, només ben aproximades per models d'ordre superior a 2.

L'anàlisi amb eines informàtiques per a sistemes híbrids dona una solució complerta del sistema, moltes vegades inapreciables o indeterminable per simulació de certes situacions.

Com en general en l'Automàtica l'èxit dels resultats depèn bàsicament de la modelització, i l'extrapolació de resultats a situacions no analitzades o previstes, les quals s'han de interpretar amb molta cura.

REFERÈNCIES

[1] P.T. RAMADGE 90 On the Periodicity of Symbolic Observations of Piecewise Smooth Discrete-Time Systems. IEEE Trans. on A. Control 35

[2] T.A. JOHANSEN 95 Identification of Non-linear System Structure and Parameters using Regime Descomposition. Automatica 31

[3] J.A. STIVER P.J. ANTSAKLIS State space partitioning for hybrid control systems. American Control Conference California 93.

[4] M.S. BRANICKY 93 Topology of Hybrid System. 32 Conf. Decision and Control

[5] A. CHOMBART J.M. FLAUS Hybrid Dynamic System Modeling. ECC 97

[6] M.D. LEMMON P.J. ANTSAKLIS 93 Event Identification in Hybrid Control Systems. 32 Conf. Decision and Control

[7] E. D. SONTAG 81 Non Linear Regulation: The Piecewise Linear Approach. IEEE Trans. Aut. Control 26.

[8] J.A.HADDON D.N.GODBOLE A.DESHPANDE J.LYGEROS Verification of Hybrid Systems: Monotonicity in the AHS Control System. DIMACS 1995.

[9] S. ESTEVA 99 Model.litzacio de Sistemes Hibrids. Report de recerca 99-43 EIA

[10] W.M.Wonham P.J. Ramadge On the Supremal Controlable Sublanguage of a Given Language. SIAM J. Control and Optimization 25(3) 1987.

[11] R. Alur et al. The Algorithmic Analysis of Hybrid Systems. Theoretical Computer Science 138(3)1995.